Ya. B. Pesin, Equations for the entropy of a geodesic flow on a compact Riemannian manifold without conjugate points, *Mat. Zametki*, 1978, Volume 24, Issue 4, 553–570

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 24, № 4 (1978)

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭНТРОПИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА КОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ БЕЗ СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧЕК

Я. Б. Песин

§ 1. Введение. Формулировка результатов. Мы будем использовать понятия и результаты римановой геометрии, энтропийной теории и теории показателей Ляпунова, с которыми можно подробно ознакомиться в [1]—[5]. Пусть M — гладкое компактное риманово n-мерное многообразие, снабженное римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ класса C^3 ($\|\cdot\|$ — соответствующая норма в T_xM, $x\in M$). Мы будем рассматривать только метрики без сопряженных точек. Обозначим SM $(2n-1)$-мерное многообразие линейных элементов, т. е. пар (x, v), $x\in M$, $v\in T_xM$, $\|v\|=1$ (иногда линейный элемент будет обозначаться просто v). Геодезический поток — это поток на многообразии SM, действие которого задается формулой $f^t(v) = \dot\gamma_v(t)$, где $\gamma_v(t)$ – геодезическая с начальным вектором v (т. е. $\dot\gamma_v(0)=v$), параметризованная длиной дуги (в дальнейшем мы будем пользоваться только такой параметризацией). Геодезический поток сохраняет риманов объем в SM (который обозначим μ), индуцированный римановой метрикой. Полем Якоби вдоль геодезической $\gamma(t)$ называется поле $Y(t)$, удовлетворяющее уравнению Якоби

$$Y''(t)+R_{XY}X=0,$$

где штрих обозначает ковариантное дифференцирование, $X(t)=\dot\gamma(t)$ и R — тензор кривизны. Рассматривая систему ортонормированных параллельных векторных полей вдоль $\gamma(t)$, можно представить уравнение Якоби в виде дифференциального уравнения второго порядка; таким образом, поле Якоби задается своими начальными значениями $Y(0)$ и $Y'(0)$. Обозначим $\pi\colon TM \to M$ естественную проекцию и $K\colon TTM \to TM$ отображение связности, индуцированное римановой метрикой, и снабдим TTM канонической римановой метрикой (см. [1])

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle d\pi\xi,\ d\pi\eta \rangle + \langle K\xi, K\eta \rangle, \qquad \xi, \eta \in TTM.$$

Для $v \in SM$, $\xi \in T_vSM$ обозначим через $Y_\xi(t)$ поле Якоби вдоль геодезической $\gamma_v(t)$, заданное начальными значениями $Y_\xi(0) = d\pi\xi$, $Y'_\xi(0) = K\xi$. Обозначим также $V(v)$ векторное поле, задающее геодезический поток, $v^\perp$ ортогональное дополнение к вектору v в $T_{\pi(v)}M$.

Предложение 1 (см. [6, предложение 1.7]). *Отображение ψ_v, сопоставляющее вектору $\xi \in T_vSM$, $\langle \xi, V(v) \rangle = 0$, пару $(d\pi\xi, K\xi) \in v^\perp \oplus v^\perp$, является изоморфизмом и изометрично в канонической метрике.*

2. $d\pi \circ df^t\xi = Y_\xi(t)$, $K \circ df^t\xi = Y'_\xi(t)$.

Пусть $v \in SM$, $w \in v^\perp$. Рассмотрим поле Якоби $Y(s, w, t)$, удовлетворяющее условиям: $Y(s, w, 0) = w$, $Y(s, w, s) = 0$ (так как риманова метрика не имеет сопряженных точек, то такое поле Якоби существует и определено единственным образом).

Предложение 2 (см. [6, § 2]). *Для любых $v \in SM$, $w \in v^\perp$ и любого $t > 0$ существует*

$$\lim_{s\to\infty} Y(s, w, t) = Y(w, t), \quad \lim_{s\to\infty} Y'(s, w, t) = Y'(w, t),$$

причем векторное поле $Y(w, t)$ есть решение уравнения Якоби, называемое предельным решением, и $Y(w, 0) = w$, $Y(w, t) \neq 0$, для любого $t \in \mathbf{R}$.

Пусть $v \in SM$. Для каждого $w \in v^\perp$ существует единственный вектор $\xi = \xi(w) \in T_vSM$, для которого $Y_\xi(t) = Y(w, t)$ (в частности, $w = d\pi\xi(w)$). Множество векторов $\xi(w)$, $w \in v^\perp$, образует в T_vSM линейное подпространство, которое мы обозначим $X^-(v)$. Если в предложении 2 устремить s в $-\infty$, то аналогичным образом можно определить подпространства $X^+(v)$.

Предложение 3 (см. [6, предложения 2.4, 2.6, 2.11]). 1. $X^-(v)$ и $X^+(v)$ — $(n-1)$*-мерные подпространства* T_vSM.

2. $d\pi X^-(v) = d\pi X^+(v) = v^\perp$.

3. $df^t X^-(v) = X^-(f^t(v))$, $df^t X^+(v) = X^+(f^t(v))$.

4. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых $v \in SM$, $\xi \in T_v SM$ и $t \geqslant 1$*

$$\| K \circ df^t \xi \| \leqslant C \| d\pi \circ df^t \xi \|. \qquad (1)$$

5. $\xi \in X^-(v)$ (*соответственно* $\xi \in X^+(v)$) *тогда и только тогда, когда* $\| d\pi \circ df^t \xi \| \leqslant \mathrm{const}$ *для любого* $t > 0$ (*соответственно* $t < 0$).

Для $v \in SM$ определим линейное отображение S_v: $v^\perp \to v^\perp$ по формуле

$$S_v w = K\xi(w) \qquad (2)$$

(напомним, что $\xi(w)$ — это такой вектор в $X^-(v)$, что $d\pi\xi(w) = w$).

В § 2 мы докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. S_v *— это линейный самосопряженный оператор.*

Из этой леммы и предложения 1 вытекает

Следствие 1. *Если $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ — два предельных решения уравнения Якоби, то*

$$\langle Y_1'(t), Y_2(t) \rangle = \langle Y_1(t), Y_2'(t) \rangle$$

для любого t.

Обозначим через $\{e_i(v)\}_{i=1}^{n-1}$ ортонормированный базис в $v^\perp$, состоящий из собственных векторов оператора S_v, а через $K_i(v)$ — соответствующие собственные значения. Отметим, что подпространства $X^-(v)$, а вместе с ними базисы $\{e_i(v)\}_{i=1}^{n-1}$ и функции $K_i(v)$ зависят от вектора $v \in SM$, вообще говоря, лишь только измеримо. Поскольку функции $K_i(v)$ ограничены (действительно, из (1) и (2) следует, что $\| S_v w \| \leqslant C \| w \|$ для любых $v \in SM$, $w \in v^\perp$), то они интегрируемы. Числа $K_i(v)$ назовем главными кривизнами в точке v, а векторы $e_i(v)$ — направлениями главных кривизн. Основанием для этих названий служат леммы 2 и 3, к формулировке которых мы сейчас и переходим.

Обозначим через H риманово универсальное накрывающее многообразие для M. Геодезические γ_1 и γ_2 в H называются асимптотическими при $t > 0$, если $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant C_1$ для некоторого $C_1 > 0$ и любого $t > 0$ (ρ — расстояние в H, индуцированное римановой метрикой). Аналогично определяются асимптотические при

$t < 0$ геодезические. Отношение асимптотичности есть отношение эквивалентности. Класс геодезических асимптотических при $t > 0$ ($t < 0$) геодезической $\gamma(t)$ называется бесконечно удаленной точкой и обозначается $\gamma(+\infty)$ (соответственно $\gamma(-\infty)$), а множество классов называется абсолютом и обозначается $H(\infty)$. Мы скажем, что многообразие M удовлетворяет аксиоме асимптотичности (см. [7, § 5]), если для любых $v_n, v \in SH$, $v_n \to v$, $x_n, x \in H$, $x_n \to x$ и последовательности чисел $t_n \to \infty$ любая предельная геодезическая последовательности геодезических γ_n, соединяющих точки $\gamma_{v_n}(t_n)$ и x_n [1]), является асимптотической при $t > 0$ геодезической $\gamma_v(t)$ (можно показать, что последовательность геодезических γ_n в этом случае сходится к некоторой геодезической γ, проходящей через точку x, и асимптотической при $t > 0$ геодезической $\gamma_v(t)$ (см. [7, § 5])). В [7] доказано, что если многообразие не имеет фокальных точек или удовлетворяет аксиоме видимости (см. [8]), в частности, является многообразием аносовского типа (т. е. существует метрика, в которой геодезический поток является У-потоком; см. [9]), то оно удовлетворяет и аксиоме асимптотичности.

Предложение 4 (см. [7, теоремы 6.1 и 6.2]). *Если многообразие M удовлетворяет аксиоме асимптотичности, то распределения $X^-(v)$ и $X^+(v)$ непрерывны и интегрируемы, а их максимальные интегральные подмногообразия (обозначаемые $\mathfrak{S}^-(v)$ и $\mathfrak{S}^+(v)$) образуют инвариантные относительно f^t непрерывные C^1 слоения многообразия SM.*

Пусть $x \in H$, $p \in H(\infty)$ и $\gamma_v(t)$ такая геодезическая, что $\gamma_v(0) = x$, $\gamma_v(+\infty) = p$. Множество $L(x, p) = \pi(\mathfrak{S}^-(v))$ называется предельной сферой с центром в точке p, проходящей через точку x.

Предложение 5 (см. [7, теорема 7.1 и предложение 7.1)]. 1. *Предельная сфера есть замкнутое подмногообразие в H класса C^1.*

2. *Любая геодезическая, асимптотическая геодезической $\gamma_v(t)$ при $t > 0$, пересекает ортогонально предельную сферу в некоторой точке. Обратно, любая геодезическая, пересекающая ортогонально предельную сферу в некоторой*

---

[1]) Последовательность геодезических γ_n компактна, так как компактна последовательность векторов $\dot{\gamma}_n(0)$.

точке, является асимптотической геодезической $\gamma_v(t)$ при $t > 0$.

3. *Предельные сферы с общим центром параллельны (и, в частности, не пересекаются).*

Доказательства следующих лемм приведены в § 2.

ЛЕММА 2. *Если риманово многообразие M с римановой метрикой класса C^r, $r \geqslant 3$, удовлетворяет аксиоме асимптотичности, то предельные сферы (а вместе с ними и слои $\mathfrak{S}^-(v)$ и $\mathfrak{S}^+(v)$ являются подмногообразиями класса C^{r-2}.*

В § 6 мы обсудим связь этого результата с результатами Дж. Х. Эшенбурга и других авторов (см. [10]—[12]).

ЛЕММА 3. *Если риманово многообразие M с римановой метрикой класса C^4 удовлетворяет аксиоме асимптотичности, то для любого $v \in SM$ оператор S_v есть оператор второй квадратичной формы предельной сферы $L(\pi(v), \gamma_v(+\infty))$ в точке $\pi(v)$.*

Для $v \in SM$ положим

$$K_{ij}(v) = \langle R_{ve_i(v)}v, e_j(v)\rangle, \quad \overline{K}_i(v) = K_{ii}(v).$$

Последнее число есть кривизна многообразия M в двумерном направлении, задаваемом векторами v и $e_i(v)$.

В §§ 3, 4 мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Для энтропии геодезического потока f^t имеют место равенства*

$$h(f^1) = -\int_{SM} \sum_{i=1}^{n-1} K_i(v)\, d\mu(v), \tag{3}$$

$$h(f^1) = -\int_{SM} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i(v)}{1 + K_i^2(v)} (1 - \overline{K}_i(v))\, d\mu(v). \tag{4}$$

Следствие 2. *Главные кривизны $K_i(v)$ и кривизны $\overline{K}_i(v)$ в двумерном направлении, задаваемом векторами v и $e_i(v)$, связаны соотношением*

$$\int_{SM} \sum_{i=1}^{n-1} K_i(v) \frac{K_i^2(v) + \overline{K}_i(v)}{K_i^2(v) + 1}\, d\mu(v) = 0. \tag{5}$$

Следствие 3. *Геодезический поток на неплоском компактном римановом многообразии без фокальных точек имеет положительную энтропию (риманово многообразие называется плоским, если его тензор кривизны тождественно равен нулю).*

Обозначим

$$\Lambda = \{v \in SM\colon \chi^+ (v, \xi) < 0 \ \text{ для любого } \ \xi \in X^- (v)\}.$$

Здесь $\chi^+ (v, \xi)$ — характеристический показатель Ляпунова (определение см. ниже в § 3). Известно (см. [4]), что Λ — измеримое инвариантное относительно потока f^t множество.

Следствие 4. *Предположим, что риманова метрика многообразия M не имеет фокальных точек и существует $v_0 \in SM$, для которого $K_i (v_0) < 0$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$ (т. е. предельная сфера $L (\pi (v_0), \gamma_{v_0} (+\infty))$ строго выпукла в точке $\pi (v_0)$. Тогда $\mu (\Lambda) > 0$.*

Из этого утверждения и [7, теорема 9.1] вытекает

Следствие 5. *Если риманово многообразие M удовлетворяет аксиоме видимости и условиям следствия 4, то геодезический поток в SM изоморфен потоку Бернулли.*

Пусть $v \in SM$. Выберем какую-либо ортонормальную систему параллельных векторных полей вдоль геодезической $\gamma_v (t)$ и рассмотрим матричное уравнение Якоби $D'' (t) + K (t) \; D (t) = 0$, где $K (t) = (K_{ij} (t))$. Пусть $D^+ (t)$ — предельное решение этого уравнения (т. е. $D^+ (t) = \lim\limits_{s \to \infty} D_s (t)$, а $D_s (t)$ — это такое решение, что $D_s (0) = E$ и $D_s (s) = 0$; см. [13], там же доказано, что матрица $D^+ (t)$ симметрична и $\det D^+ (t) \neq 0$ для всех t); $U (t) = D' (t) D^{-1} (t)$ — симметричное решение матричного уравнения Риккати.

Следствие 6. *$K_i (v)$ — это собственные значения матрицы $U (0)$ и*

$$\int_{SM} \sum_{i=1}^{n-1} K_i^2 (v) \, d\mu (v) = -\frac{\omega_{n-1}}{n} \int_M K (x) \, dm (x),$$

где ω_{n-1} — объем $(n-1)$-мерной единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $K (x)$ — скалярная кривизна в точке $x \in M$ (свертка тензора Риччи; см. [1, стр. 114]) *и m — гладкая мера в M, индуцированная римановой метрикой.*

Рассмотрим случай двумерного многообразия. Очевидно, что прямая $X^- (v)$ лежит в плоскости, образованной прямыми $\mathrm{Ker}\, d\pi (v)$ и $\mathrm{Ker}\, K (v)$ (эта плоскость ортогональна вектору потока $V (v)$), и пусть $\alpha (v)$ — угол между прямыми $X^- (v)$ и $\mathrm{Ker}\, K (v)$, отсчитываемый от последней против часовой стрелки.

Следствие 7.

$$h(f^1) = -\int_{SM} \operatorname{tg} \alpha(v)\, d\mu(v).$$

§ 2. **Доказательство лемм 1, 2 и 3.** Для $v \in SM$ обозначим через $S(v, t)$ сферу в H с центром в точке $\gamma_v(t)$ и радиуса t, а через $\Pi(v, \varepsilon)$ — геодезическую площадку в точке $\pi(v)$ (т.е. множество отрезков геодезических длины 2ε, проходящих через точку $\pi(v)$ ортогонально геодезической $\gamma_v(t)$. При достаточно малом ε (которое в силу компактности многообразия M можно выбрать независимо от $v \in SM$) некоторая окрестность $U(v, \varepsilon)$ в M точки $\pi(v)$ допускает параметризацию $\chi(v, \varepsilon)$: для $y \in U(v, \varepsilon)$ имеем $\chi(v, \varepsilon)(y) = (y_1, \ldots, y_n)$, где y_1 равно расстоянию от y до $\Pi(v, \varepsilon)$ (вдоль ортогональной к $\Pi(v, \varepsilon)$ геодезической), а $y_2, \ldots, y_n$ — координаты на $\Pi(v, \varepsilon)$, задаваемые посредством произвольного ортонормированного $(n-1)$-репера в $v^\perp$. В этих координатах множество $S(v, t) \cap U(v, \varepsilon)$ представляется графиком некоторого отображения $\varphi_{t,v}(u)$, где $u \in \Pi(v, \varepsilon)$. Покажем сначала, что семейство функций $\{\varphi_{t,v}, t \geqslant 1\}$ компактно в C^{r-2}-топологии. Пусть $v \in SM$, $w \in v^\perp$. Рассмотрим такой отрезок $\delta_t(s)$, $-\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon$, на сфере $S(v, t)$, что $\delta_t(0) = \pi(v)$, $\dot{\delta}_t(0) = w$, и такую вариацию $r_t(q, s)$ геодезической γ_v, что $r_t(q, s)$ есть геодезическая в H, соединяющая точки $\gamma_v(t)$ и $\delta_t(s)$. Из уравнения геодезических (см. [1, § 2]) и теоремы о дифференцируемой зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных (см. [14, § 32]) вытекает, что сфера $S(v, t)$ есть подмногообразие в H класса C^{r-1}, так что вариация $r_t(q, s)$ $(r-1)$-раз непрерывно дифференцируема по q и s. Векторное поле $Y_t(q, s) = \frac{\partial}{\partial s} r_t(q, s)$ есть поле Якоби вдоль геодезической $r_t(q, s)$ (s фиксировано), удовлетворяющее условиям $Y_t(t, s) = 0$, $Y_t(0, s) = \dot{\delta}_t(s)$. Из первого равенства, компактности многообразия M (которая влечет, что кривизна в каждом двумерном направлении ограничена снизу некоторым числом) и [6, предложение 2.7] следует, что

$$\| Y_t'(0, s) \| \leqslant K \| Y_t(0, s) \| \leqslant K$$

для любого $t \geqslant 1$ и $-\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon$ (K — некоторая постоянная). Поскольку компоненты тензора кривизны суть вторые производные метрического тензора, то они $(r-2)$-раза непрерывно дифференцируемы. Таким образом, зная оценки для $\| Y_t(0, s) \|$ и $\| Y_t'(0, s) \|$ и воспользовавшись уравнением Якоби для $Y_t(q, s)$, а также получающимся из него уравнением на l-ю ковариантную производную $Y_t^{(l)}(q, s)$, получим, что

$$\| Y_t^{(l)}(0, s) \| \leqslant C, \quad l = 1, \ldots, r-2, \tag{6}$$

причем постоянная $C > 0$ не зависит от $v \in SM$ и числа t.

Пусть $\delta_t^1(s), \ldots, \delta_t^n(s)$ — координаты точки $\delta_t(s)$ во введенной выше системе локальных координат $\chi(v, \varepsilon)$ в окрестности $U(v, \varepsilon)$. Записывая l-ю ковариантную производную векторного поля $Y_t(0, s) = \dot{\delta}_t(s)$ в этих координатах для $l = 1, \ldots, r-2$ (подчеркнем, что компоненты связности Γ_{ij}^k — $(r-1)$-раз непрерывно дифференцируемые функции) и используя оценки (5), получим, что $\| D^l \delta_t^i(s) \| \leqslant \mathrm{const}$ для $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r-1$. Отсюда вытекает, что полилинейные формы $D^l \varphi_{t,v}(0)$, $l = 1, \ldots, r-1$ (которые существуют, ибо, как указано выше, сфера есть подмногообразие в H класса C^{r-1}), ограничены. Пусть $y \in \mathrm{Graph}\, \varphi_{t,v}$ и $w \in SM$ ортогонально сфере $S(v, t)$ в точке y. Представляя поверхность сферы $S(v, t)$ в окрестности $U(w, \varepsilon)$ точки $\pi(w)$ в координатах $\chi(w, \varepsilon)$ (которые строятся точно так же, как координаты $\chi(v, \varepsilon)$ в точке $\pi(v)$) в виде графика некоторой функции $\varphi_{t,w}$ и повторяя предыдущие рассуждения, найдем, что $\| D^l \varphi_{t,w}(0) \| \leqslant \mathrm{const}$. Поскольку переход от координат $\chi(w, \varepsilon)$ к координатам $\chi(v, \varepsilon)$ есть ортогональное преобразование, то отсюда вытекает, что

$$\| D^l \varphi_{t,v}(u) \| \leqslant \mathrm{const}, \quad u \in \Pi(v, \varepsilon).$$

Таким образом, семейство функций $\{\varphi_{t,v},\ t \geqslant 1\}$ компактно в C^{r-1}-топологии. Пусть φ_v — любая предельная функция этого семейства. (В работе [7] доказано для многообразий, удовлетворяющих аксиоме асимптотичности, что $\varphi_{t,v} \to \varphi_v$ при $t \to \infty$, так что график φ_v — это «кусок» предельной сферы, которая получается, таким образом, склеиванием этих «кусков».) Из сказанного выше следует, что $\varphi_v \in C^{r-2}$, и лемма 2 доказана.

Рассмотрим оператор $\bar{S}_v$ второй квадратичной формы подмногообразия $W_v = \mathrm{Graph}\, \varphi_v$ в точке v. Имеем (см.

[1, § 3]) $\bar{S}_v w = K \circ di(w)$, где $w \in v^\perp$ и $i: W_v \to TM$ сопоставляет точке $y \in W_v$ вектор w, ортогональный подмногообразию W_v в точке y. Вектор $di(w)$ лежит в касательном пространстве к подмногообразию $\widetilde{W}_v$, получающемуся оснащением подмногообразия W_v ортонормальными векторами. Из определения φ_v вытекает, что для $\xi \in T_v\widetilde{W}_v$ существуют последовательности чисел $t_k \to \infty$ и векторов ξ_k таких, что $\xi_k \to \xi$ и $Y_{t_k}(q, 0) = Y_{\xi_k}(q)$. Таким образом, $\xi \in X^-(v)$. Кроме того,

$$\dim T_v\widetilde{W}_v = \dim X^-(v) = n - 1.$$

Поэтому $T_v\widetilde{W}_v = X^-(v)$. Отсюда следует, что $di(w) \in X^-(v)$ для $w \in v^\perp$. Сравнивая выражения для S_v и $\bar{S}_v$ и учитывая, что $\pi \circ i(y) = y$ для любого $y \in \widetilde{W}_v$, получим, что $S_v = \bar{S}_v$. Это доказывает леммы 1 и 3, поскольку оператор $\bar{S}_v$ самосопряжен (см. [1, § 3]).

Замечание. Приведем другое доказательство леммы 1, которое предложил Д. В. Аносов. Рассмотрим фундаментальную 2-форму Ω (напомним, что $\Omega = d\omega$, а 1-форма ω на TTM задается равенством $\omega_v(\xi) = (Lv)(d\pi\xi)$, где $v \in TM$, $\xi \in T_v\,SM$ и $L: TM \to T^*M$ — преобразование Лежандра; см. [2]). Фиксируем $t > 0$, и пусть $X_t(v)$ — подпространство в $T_v\,SM$, являющееся касательным пространством к подмногообразию, получающемуся оснащением сферы $S(v, t)$ ортонормальными векторами (таким образом, $X_t(v)$ состоит из векторов $\lambda\xi_t$, $\lambda \in \mathbf{R}$, соответствующих таким полям Якоби $Y_t(s)$, что $Y_t(0) = 1$ и $Y_t(t) = 0$). Поскольку подпространство

$$df^t X_t(v) = \operatorname{Ker}\ d\pi\,(f^t(v))$$

лагранжево (т. е. на нем форма Ω вырождена), то подпространство $X_t(v)$ лагранжево (так как форма Ω инвариантна относительно df^t). Поэтому из непрерывности формы Ω вытекает, что подпространство $X^-(v)$ лагранжево. Проводя отождествление с помощью отображения ψ_v, построенного в предложении 1, и используя локальное представление формы Ω (см. [2]), получим для $\xi, \eta \in T_v\,SM$, что

$$\Omega(\xi, \eta) = \Omega((v, d\pi\xi, K\xi), (v, d\pi\eta, K\eta)) = \langle d\pi\xi, K\eta\rangle - \langle K\xi, d\pi\eta\rangle.$$

Поэтому из условия $\xi, \eta \in X^-(v)$ (эквивалентного, в силу сказанного выше, тому, что $\Omega(\xi, \eta) = 0$) вытекает самосопряженность оператора S_v.

§ 3. Формула для энтропии потока. Пусть f^t — поток класса C^2 на гладком компактном n-мерном римановом многообразии M, заданный векторным полем $X(x)$ и сохраняющий меру ν, эквивалентную риманову объему. Характеристическим показателем Ляпунова потока f^t называется функция $\chi^+ \colon TM \to \mathbf{R}$, задаваемая формулой

$$\chi^+(x, v) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| df^t v \|, \qquad x \in M,\ v \in T_x M.$$

При фиксированном $x \in M$ функция χ^+ принимает не более n различных значений, обозначаемых в порядке возрастания: $\chi_1(x), \ldots, \chi_{s(x)}(x)$. Пусть $q_i(x)$ — кратность значения $\chi_i(x)$ (т. е. максимальное число линейно независимых векторов $v \in T_x M$, для которых $\chi^+(x, v) = \chi_i(x)$). Из теоремы 4 в [4] (см. также [15, § 1]) вытекает

Предложение 6. *Для почти каждого $x \in M$ существуют подпространства $E^-(x)$, $E^0(x)$, $E^+(x)$ такие, что*

1. $T_x M = E^-(x) \oplus E^0(x) \oplus E^+(x)$, $E^0(x) \supset$
$\supset \{\alpha X(x),\ \alpha \in \mathbf{R}\}$.

2. *Подпространства $E^-(x)$, $E^0(x)$, $E^+(x)$ инвариантны относительно df^t.*

3. $\chi^+(x, v) < 0$ (*соответственно* $\chi^+(x, v) = 0$ *и* $\chi^+(x, v) > 0$) *для всякого* $v \in E^-(x)$ (*соответственно* $v \in E^0(x)$ *и* $v \in E^+(x)$).

Число $k(x) = \dim E^-(x)$ *равно числу различных отрицательных значений показателя* $\chi^+(x, v)$.

Пусть $E(x)$ — произвольное семейство подпространств, измеримо зависящих от $x \in M$, инвариантных относительно df^t и удовлетворяющих условию

$$E^-(x) \subseteq E(x) \subseteq E^-(x) \oplus E^0(x).$$

Выберем произвольно нормальный базис $\{e_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$ (определение нормального базиса см. в [4]), измеримо зависящий от $x \in M$, так, чтобы $e_i(x) \in E(x)$ для $i = 1, \ldots, \dim E(x)$. Обозначим $\Pi(x)$ параллелепипед, натянутый на векторы $e_i(x)$, $i = 1, \ldots, \dim E(x)$, $V(\Pi(x))$ — его объем, $\lambda_t(x) = V(df^t(\Pi(x)))/V(\Pi(x))$ — коэффициент растяжения объема. Поскольку отображение df^t линейно, число $\lambda_t(x)$ равняется якобиану отображения

$df^t \mid E(x)$. Положим

$$\chi^+(\Pi(x)) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln V(df^t(\Pi(x))).$$

Предложение 7 (см. [4, теорема 4]). *Для почти каждого* $x \in M$

$$\chi^+(\Pi(x)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln V(df^t(\Pi(x))) = \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x)\chi_i(x).$$

Из предложения 7, формулы для энтропии диффеоморфизма (см. [5, § 5]) и эргодической теоремы вытекает, что для каждого $t \neq 0$

$$\begin{aligned} h(f^t) &= \\ &= -\int_M \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x)\chi_i(x)\,d\nu(x) = -\int_M \chi^+(\Pi(x))\,d\nu(x) = \\ &= -\int_M \lim_{n\to\infty} \frac{1}{tn} \ln V(df^{tn}(\Pi(x)))\,d\nu(x) = \\ &= -\int_M \lim_{n\to\infty} \frac{1}{tn} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \lambda_t(f^{tk}(x))\,d\nu(x) = \\ &= -\int_M \ln \lambda_t(x)\,d\nu(x). \qquad (7) \end{aligned}$$

Поскольку $h(f^t) = |t|\,h(f^1)$ (см. [3, § 2]), то для $t > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} h(f^1) &= \frac{1}{t} h(f^t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} h(f^t) = \\ &= -\int_M \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(x)\,d\nu(x). \qquad (8) \end{aligned}$$

(Мы воспользовались здесь теоремой Лебега о почленном интегрировании ограниченных последовательностей и тем обстоятельством, что $e^{at} \leqslant \lambda_t(x) \leqslant e^{bt}$, $t > 0$, при некоторых a и b.)

Пусть теперь f^t — геодезический поток, $v \in SM$, $\xi \in X^-(v)$. В силу предложения 2

$$\| df^t\xi \| \leqslant (1 + C)\,\| d\pi \circ df^t\xi \|, \qquad t \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\chi^+(v, \xi) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| d\pi \circ df^t\xi \|. \qquad (9)$$

Пусть $\{\xi_i(v)\}_{i=1}^{n-1}$ — базис в $X^-(x)$, состоящий из векторов $\xi_i(v)$, для которых $d\pi\xi_i(v) = e_i(v)$ ($e_i(v)$ — направления главных кривизн; см. § 1). Обозначим $\Pi(v)$ параллелепипед в $X^-(v)$, натянутый на векторы $\xi_i(v)$, и $\overline{\Pi}(v)$ — параллелепипед в $v^\perp$, натянутый на векторы $e_i(v)$. Поскольку показатель угла между векторами e_i и e_j равен нулю, то из (9) получаем, что

$$\chi^+(V(\Pi(v))) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln V(d\pi \circ df^t(\Pi(v))) = \chi^+(V(\overline{\Pi}(v))).$$

Пусть $\overline{\lambda}_t(v) = V(d\pi \circ df^t(\Pi(v)))/V(\overline{\Pi}(v))$ — коэффициент объемного расширения в $v^\perp$ (т. е. якобиан отображения $d\pi \circ df^t \mid X^-(v)$). Переписывая равенства (7) для отображения $d\pi \circ df^t$ и параллелепипеда $\overline{\Pi}(v)$, получим аналогично (8) следующую формулу для энтропии геодезического потока:

$$h(f^1) = -\int_{SM} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \overline{\lambda}_t(v)\, d\mu(v). \tag{10}$$

В следующем параграфе мы вычислим для геодезического потока подынтегральные выражения в формулах (10) и (8), что приведет нас соответственно к формулам (3) и (4).

§ 4. Доказательство основной теоремы. Пусть $v \in SM$, $e_i(v)$ — направления главных кривизн $\xi_i = \xi_i(v) \in X^-(v)$ таковы, что $d\pi\xi_i(v) = e_i(v)$. Имеем для любых $i, j = 1, \ldots, n-1$ и $t > 0$

$$\begin{aligned}\langle Y_{\xi_i}(t), Y_{\xi_j}(t)\rangle &= \langle Y_{\xi_i}(0), Y_{\xi_j}(0)\rangle + \int_0^t \langle Y_{\xi_i}(s), Y_{\xi_j}(s)\rangle' ds = \\ &= \langle Y_{\xi_i}(0), Y_{\xi_j}(0)\rangle + \int_0^t [\langle Y'_{\xi_i}(s), Y_{\xi_j}(s)\rangle + \\ &\qquad + \langle Y_{\xi_i}(s), Y'_{\xi_j}(s)\rangle]\, ds,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\langle Y'_{\xi_i}(t), Y'_{\xi_j}(t)\rangle &= \\ &= \langle Y'_{\xi_i}(0), Y'_{\xi_j}(0)\rangle + \int_0^t \langle Y'_{\xi_i}(s), Y'_{\xi_j}(s)\rangle' ds = \\ &= \langle Y'_{\xi_i}(0), Y'_{\xi_j}(0)\rangle - \int_0^t [\langle (R_{XY_{\xi_i}} X)(s), Y'_{\xi_j}(s)] + \\ &\qquad + \langle Y'_{\xi_i}(s), (R_{XY_{\xi_j}} X)(s)\rangle]\, ds.\end{aligned} \tag{12}$$

Имеем также

$$\langle Y_{\xi_i}(0),\ Y_{\xi_j}(0)\rangle = \langle e_i(v),\ e_j(v)\rangle = \delta_{ij}, \tag{13}$$

$$\langle Y'_{\xi_i}(0),\ Y'_{\xi_j}(0)\rangle = \langle S_v e_i(v),\ S_v e_j(v)\rangle = -K_i(v) K_j(v)\delta_{ij}. \tag{14}$$

Положим

$$a_{ij}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [\langle Y'_{\xi_i}(s), Y_{\xi_j}(s)\rangle + \langle Y_{\xi_i}(s), Y'_{\xi_j}(s)\rangle]\, ds,$$

$$b_{ij}(t) = -\frac{1}{t}\int_0^t [\langle (R_{XY_{\xi_i}}X)(s), Y'_{\xi_j}(s)\rangle + \\ + \langle Y'_{\xi_i}(s), (R_{XY_{\xi_j}}X)(s)\rangle\, ds,$$

$$c_{ij}(t) = \langle Y_{\xi_i}(t),\ Y_{\xi_j}(t)\rangle + \langle Y'_{\xi_i}(t),\ Y'_{\xi_j}(t)\rangle.$$

Поскольку подынтегральные функции непрерывны, то при $t = 0$ получим

$$a_{ij}(0) = \langle Y'_{\xi_i}(0),\ Y_{\xi_j}(0)\rangle + \langle Y_{\xi_i}(0),\ Y'_{\xi_j}(0)\rangle = \\ = \langle S_v e_i(v),\ e_j(v)\rangle + \langle e_i(v),\ S_v e_j(v)\rangle = \\ = (K_i(v) + K_j(v))\ \delta_{ij}, \tag{15}$$

$$b_{ij}(0) = -\langle (R_{XY_{\xi_i}}X)(0), Y'_{\xi_j}(0)\rangle - \langle Y'_{\xi_i}(0), (R_{XY_{\xi_j}}X)(0)\rangle = \\ = -K_j(v)\ \langle R_{ve_i(v)}\, v,\ e_j(v)\rangle - K_i(v)\ \langle e_i(v),\ R_{ve_j(v)}\, v\rangle = \\ = -K_j(v) K_{ij}(v) - K_i(v)\ K_{ij}(v). \tag{16}$$

Обозначим через $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ матрицы, составленные из элементов $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ и $c_{ij}(t)$ соответственно, и через D — матрицу, составленную из элементов $d_{ij} = K_i(v)\ K_j(v)\delta_{ij}$. Рассмотрим параллелепипед $\Pi(v)$, натянутый на векторы $\xi_i(v)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Для любого $t > 0$ в силу определения канонической метрики в TTM (см. § 1) имеем $V(df^t(\Pi(v))) = \sqrt{\det C(t)}$. Из равенств (11) — (14) и формулы для производной определителя (см. [14, стр. 102]) получим

$$V(df^t(\Pi(v))) = \sqrt{\det[E + D + t(A(t) + B(t))]} = \\ = \sqrt{\det(E + D)\det[E + t(E + D)^{-1}(A(t) + B(t))]} = \\ = \sqrt{\det(E + D)[1 + t\operatorname{Sp}[(E + D)^{-1}(A(t) + B(t))] + O(t^2)]} = \\ = \sqrt{\det(E + D)}\,[1 + (1/2)\, t\operatorname{Sp}[(E + D)^{-1}(A(t) + B(t))] + \\ + O(t^2)].$$

(Здесь Sp обозначает след матрицы.) Поскольку $V(\Pi(v)) = \sqrt{\det(E+D)}$, то из этих равенств вытекает

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(v) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}[(E+D)^{-1}(A(0)+B(0))]. \qquad (17)$$

Из формул (15) и (16) следует, что i-й диагональный элемент матрицы $(E+D)^{-1}(A(0)+B(0))$ равен $\frac{2K_i(v)}{1+K_i^2(v)}(1-\overline{K}_i(v))$. Отсюда и из (17) вытекает формула (4). Для доказательства формулы (3) заметим, что

$$V(d\pi\circ df^t(\Pi(v))) = \sqrt{\det|\langle d\pi\circ df^t\xi_i, d\pi\circ df^t\xi_j\rangle|} = \sqrt{\det|\langle Y_{\xi_i}(t), Y_{\xi_j}(t)\rangle|}.$$

Повторяя предыдущие для параллелепипеда $d\pi\circ df^t(\Pi(v))$ и воспользовавшись равенствами (11) и (13), найдем, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \overline{\lambda}_t(v) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A(0).$$

В силу (15) i-й диагональный элемент матрицы $A(0)$ равен $2K_i(v)$, что приводит нас к формуле (3).

§ 5. Доказательство следствий 2—4, 6, 7. 1. Формула (5) непосредственно вытекает из формул (3) и (4).

2. Доказательство следствия 3. Поскольку риманова метрика в M не имеет фокальных точек, предельная сфера выпукла (см. [7, предложение 7.3]), так что $K_i(v) \leqslant 0$ для любого $v \in SM$ и $i = 1, \ldots, n-1$. Если $h(f^1) = 0$, то отсюда и формулы (3) (напомним, что из отсутствия фокальных точек вытекает отсутствие сопряженных точек; см. (1)) следует, что $K_i(v) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, $S_v \equiv 0$ для любого $v \in SM$, так что $X^-(v) = \operatorname{Ker} K(v)$. Поэтому из предложения 1 вытекает, что для любого $\xi \in X^-(v)$

$$Y_\xi'(t) = K\circ df^t\xi = 0. \qquad (18)$$

Так как для любых $v \in SM$, $w \in v^\perp$ существует такое поле Якоби $V_\xi(t)$ вдоль геодезической $\gamma_v(t)$, что $d\pi\xi = w$, то из равенства (18) и уравнения Якоби следует, что $R \equiv 0$.

3. Доказательство следствия 4. Поскольку риманова метрика в M не имеет фокальных точек, распределение $X^-(v)$ непрерывно (см. предложение 3). Поэтому оператор S_v, а вместе с ним и главные кривизны $K_i(v)$ непрерывны. Отсюда и из условий вытекает существование такого $C < 0$ и такого шара $B(v_0, r)$ в SM с центром в v_0 и радиуса r, что для любого $v \in B(v_0, r)$

$$K_i(v) \leqslant C < 0, \quad i = 1, \ldots, \quad n-1. \tag{19}$$

Обозначим через $T(t, v)$ меру в $\mathbf{R}$ тех моментов s, $0 \leqslant s \leqslant t$, для которых $df^t v \in B(v_0, r/2)$. Из эргодической теоремы вытекает существование такого измеримого инвариантного относительно геодезического потока f^t множества Λ положительной меры, что для любого $v \in \Lambda$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T(t, v)}{t} = \mu\left(B\left(v_0, \frac{r}{2}\right)\right). \tag{20}$$

Пусть $v \in SM$, $e_i(v)$ — направления главных кривизн, $\xi_i(v) \in X^-(v)$ таковы, что $d\pi\xi_i(v) = e_i(v)$. Обозначим через $\lambda_t^i(v)$ коэффициент линейного расширения в направлении $e_i(v)$, т. е.

$$\lambda_t^i(v) = \| d\pi \circ df^t \xi_i(v) \| = \| Y_{\xi_i}(t) \|.$$

Из результатов § 4 и из (11), (13) и (15) следует, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \lambda_t^i(v) = K_i(v). \tag{21}$$

Из соотношений (19) и (21) вытекает, что для некоторого $r > 0$ и любого $v \in B(v_0, r)$ справедливо неравенство

$$\| d\pi \circ df^{r/2}\xi_i(v) \| \leqslant e^{Cr/4}.$$

Поскольку векторы $\xi_i(v)$ образуют базис в пространстве $X^-(v)$, то отсюда следует, что для любых $v \in B(v_0, r/2)$ и $\xi \in X^-(v)$

$$\| d\pi \circ df^{r/2}\xi \| \leqslant e^{Cr/4} \| \xi \|. \tag{22}$$

Так как многообразие M не имеет фокальных точек, то функция $\| Y_\xi(t) \|$, $\xi \in X^-(v)$, не возрастает (см. [6, § 3]; это следует также из (21) и условия $K_i(v) \leqslant 0$ для любого $v \in SM$), так что для любых $v \in \Lambda$, $\xi \in X^-(v)$ и любого $t \geqslant 0$

$$\| d\pi \circ df^t \xi \| \leqslant \| \xi \|. \tag{23}$$

Из неравенств (22) и (23) на основании (20) заключаем, что для любых $v \in \Lambda$, $\xi \in X^-(v)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| d\pi \circ df^t \xi \| < 0.$$

Поэтому для любых $v \in \Lambda$, $\xi \in X^-(v)$ в силу (9) будем иметь

$$\chi^+(v, \xi) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| d\pi \circ df^t \xi \| < 0.$$

4. Доказательство следствия 6. Пусть $\{h_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ — какая-либо ортонормальная система параллельных векторных полей вдоль геодезической $\gamma_v(t)$. В [13] доказано, что при переходе от одной такой системы к другой матрица $U(t)$ переходит в подобную. Считая $h_i(0) = e_i(v)$ ($e_i(v)$ — направления главных кривизн), получим, что $U(0)$ — это диагональная матрица с диагональными элементами $K_i(v)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из формулы для $\mathrm{Sp}\, U^2(0)$, доказанной в [13].

5. Доказательство следствия 7. Для $v \in SM$ выберем $w(v) \in SM$ так, чтобы $\pi(v) = \pi(w(v))$ и угол между векторами v и $w(v)$, отсчитываемый от вектора v против часовой стрелки, равнялся $\pi/2$. Выберем в $T_v SM$ ортонормированный в канонической метрике базис, состоящий из векторов $\xi_1(v)$, $\xi_2(v)$ и $V(v)$ (вектор потока), образующих правую тройку и таких, что

$$\xi_1(v) \in \mathrm{Ker}\, K(v), \quad \xi_2(v) = \mathrm{Ker}\, d\pi(v)$$

и $d\pi\xi_1(v) = w(v)$. Так как вектор-функции $w(v)$, $\xi_1(v)$, $\xi_2(v)$ непрерывны на SM, то из предложения 1 вытекает, что $K_1(v) = \mathrm{tg}\, \alpha(v)$.

§ 6. Функция Буземана и предельные сферы. Наши методы дают некоторую информацию о свойствах функции Буземана (хотя выше мы не привлекали ее явно). Напомним сначала ее определение и некоторые факты. Пусть $v \in SH$ и $x \in H$. Из неравенства треугольника вытекает, что функция $f_v(t, x) = \rho(x, \gamma_v(t)) - t$ (ρ — расстояние в H, индуцированное римановой метрикой) монотонно убывает, когда $t \to \infty$, и ограничена. Функция $f_v(x) = \lim_{t\to\infty} f_v(t, x)$ называется функцией Буземана, а ее поверхности уровня — предельными сферами. Можно показать (см. [12, предложение 1]), что функция $f_v(x)$ непрерывно дифференцируема по x. Некоторые свойства предельных сфер могут быть установлены при довольно слабых ограничениях (например, свойство, аналогичное параллельности, можно доказать в предположении о том, что распределение $X^-(v)$ непрерывно; см. [12, предложение 3]). Однако для доказательства свойств предельных сфер, сформулированных в предложениях 4 и 5, требуются уже более жесткие ограничения. Исследуя функцию Буземана, П. Эберлейн (см. [10]) установил эти свойства для многообразий неположительной кривизны. Дж. X. Эшенбург (см. [12]) обобщил его результаты на многообразия, удовлетворяющие так называемому условию ограниченной асимптотичности (это означает, что $\| Y_\xi(t)\| \leqslant \leqslant \mathrm{const}$ равномерно по всем $t \geqslant 0$ и всем $v \in SM$, $\xi \in X^-(v)$, $\|\xi\| = 1$; этому условию удовлетворяют многообразия без фокальных точек и многообразия аносовского типа, однако оно является менее общим, чем наша аксиома асимптотичности). Наконец, Э. Хайнц и Г.-Х. Им Хоф (для многообразий неположительной кривизны; см. [11]) и Дж. X. Эшенбург (для многообразий, удовлетворяющих условию ограниченной асимптотичности; см. [12]) доказали, что функция Буземана (а следовательно, и предельные сферы) дважды непрерывно дифференцируема. Ниже мы покажем для многообразий, удовлетворяющих аксиоме асимптотичности, что построенные нами (как предел сфер) предельные сферы являются поверхностями уровня функции Буземана. Отсюда вытекает, во-первых, что $f_v(x) = f_w(x)$, если геодезические $\gamma_v(t)$ и $\gamma_w(t)$ асимптотические при $t > 0$; таким образом, функция Буземана есть функция двух переменных: точки $x \in H$ и точки $p = \gamma_v(+\infty) \in H(\infty)$. Во-вторых, $f_p(x) \in C^{r-2}$ ($r \geqslant 3$ — класс гладкости римановой метрики) и непрерывна по переменной p. Итак, докажем следующее утверждение.

Предложение 8. *Если многообразие M удовлетворяет аксиоме асимптотичности, то $f_v(y) = f_v(\pi(v)) = 0$ для любых $v \in SM$ и $y \in L(\pi(v), \gamma_v(+\infty))$.*

Доказательство. Если

$$y \in W = B(\pi(v), r) \cap L(\pi(v), \gamma_v(+\infty)),$$

то для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$|f_v(t, y)| \leqslant \rho(W, S(v, t) \cap B(\pi(v), r)),$$

а последнее расстояние стремится к нулю при $t \to \infty$ в силу [7, лемма 6.4]. Предложение доказано.

Гипотеза о том, что имеет место равенство (3), впервые была высказана Я. Г. Синаем, что послужило толчком к моим исследованиям, а также во многом предопределило их характер. Пользуясь случаем, я приношу Я. Г. Синаю свою искреннюю благодарность. Я также благодарю Д. В. Аносова за очень полезные обсуждения.

Всесоюзный научно-исследовательский институт оптико-физических измерений

Поступило 16.II.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Громул Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, М., «Мир», 1971.

[2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.

[3] Рохлин В. А., Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой, Успехи матем. наук, **22**, № 5 (1967), 4—51.

[4] Оселедец В. И., Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, Тр. Моск. матем. о-ва, **19** (1968), 179—210.

[5] Песин Я. Б., Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория, Успехи матем. наук, **32**, № 4 (1977), 55—111.

[6] Eberlein P., When is a geodesic flow of Anosov type. I, J. Differential Geometries, 8, № 3 (1973), 437—463.

[7] Песин Я. Б., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях без фокальных точек, Изв. АН СССР, Сер. матем., **41**, № 6 (1977), 1252—1288.

[8] Eberlein P., Geodesic flow in certain manifolds whitout conjugate points, Trans. Amer. Math. Soc., **167** (1972), 151—270.

[9] Klingenberg W., Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type, Ann. of Math., **99** (1974), 1—13.

[10] Eberlein P., Geodesic flows on negatively curved manifolds. I, Ann. of Math., 95 (1972), 492—510.

[11] Heinfze E., Im Hof H.-C., On the geometry of horospheres, препринт, Бонн, 1975.

[12] Eschenburg J. H., Horospheres and the stable part of the geodesic flow, Math. Z., **1953** (1977), 237—251.

[13] Green L. W., A theorem of E. Hopf, Michigan Math., J., **5** (1958), 31—34.

[14] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1975.

[15] Песин Я. Б., Семейства инвариантных многообразий, отвечающие ненулевым характеристическим показателям, Изв. АН СССР, Сер. матем., **40**, № 6 (1976), 1332—1379.